

## FORMULACIÓN DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

### ECUACIÓNS DE MAXWELL NO ESPACIO LIBRE

A definición de partida dos campos eléctrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$  baséase na *forza de Lorentz* sobre unha carga puntual  $q$  movéndose con velocidade  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

A non ser no caso estático,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  non existen independentemente, senon solo combinados formando o *campo electromagnético*. As relacións entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , e deles coas fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ , están dadas polas *ecuacións de Maxwell*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

As constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ , características do espacio libre, chámanse respectivamente *permitividade eléctrica* e *permeabilidade magnética* do espacio libre.

### FONTES DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Según o teorema de Helmholtz<sup>1</sup>, un campo vectorial  $\mathbf{F}$  definido nun volumen  $V$  pódese expresar como

$$\mathbf{F} = \nabla \psi + \nabla \times \mathcal{A}, \quad (1.3)$$

sendo<sup>2</sup>

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \chi \quad (1.4 a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (1.4 b)$$

e  $\chi$  unha certa solución da ecuación de Laplace, determinada salvo unha constante pola compoñente normal do campo na superficie:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi &= 0 & (1.4 c) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \psi + \nabla \times \mathcal{A})|_{S'} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}|_{S'} \end{aligned}$$

As primas nos campos e conxuntos de definición (volumen, superficie...) significan que están definidos en *puntos fonte*, e nos operadores, que operan sobre estes puntos fonte.

$\nabla \cdot \mathbf{F}$  chámase *fonte escalar* de  $\mathbf{F}$ , e  $\nabla \times \mathbf{F}$ , *fonte vectorial* de  $\mathbf{F}$ .

<sup>1</sup> Docencia / Asignatura de Electromagnetismo / Tcampos3, en <http://www.usc.es/fagms/>.

<sup>2</sup> O teorema de Helmholtz describe a dependencia *espacial* dun campo vectorial tridimensional definido nun volumen tamén tridimensional.  $V$  e  $V'$  representan *o mesmo volumen físico*, pero descrito por conxuntos de coordenadas distintos (vector  $\mathbf{r}$  e en  $V$  e vector  $\mathbf{r}'$  en  $V'$ ). As magnitudes sin primas supóñense funcións de  $\mathbf{r}$ . As magnitudes con primas serán funcións de  $\mathbf{r}'$ . Cando non haxa ambigüidade, poderanse omitir as primas. Un operador diferencial representa derivadas con respecto ás compoñentes de  $\mathbf{r}$  ou de  $\mathbf{r}'$ , según non leve ou leve prima, respectivamente.

Se  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  e  $\nabla \times \mathbf{F}$  decaen a grandes distancias máis rápidamente ca  $1/r'^2$ ,  $V'$  pódese ser todo o espazo. Neste caso  $\chi$  é unha constante calquera, e o seu gradiente é cero.

Defínense as compoñentes *lonxitudinal ou irrotacional*,  $\mathbf{F}_L$  e *transversal ou solenoidal*,  $\mathbf{F}_T$  dun campo  $\mathbf{F}$  polas relacións seguintes

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_L &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \nabla \times \mathbf{F}_L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_T &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{F}_T &= \nabla \times \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

A relación (1.3) é unha descomposición única  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_T$  do campo. Está claro que

$$\mathbf{F}_L = \nabla \psi \quad \mathbf{F}_T = \nabla \times \mathcal{A} \quad (1.6)$$

As fontes escalares producen campos lonxitudinais, e as fontes vectoriais producen campos transversales.

### Exemplo

O campo electrostático é lonxitudinal. O campo magnético  $\mathbf{B}$  é sempre transversal, independentemente de que sea estático ou non. No espazo libre en ausencia de fontes tamén  $\mathbf{E}$  é transversal ( $\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ). Debido a isto é consistente dicir que as ondas electromagnéticas, formadas por dous campos transversales, son *transversales*<sup>3</sup>.

Desde un punto de vista clásico, as fontes do campo electromagnético  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  teñen natureza continua, dando lugar a campos continuos e derivables. Pero nalgúns problemas é ventaxoso usar *modelos matemáticos* discontinuos que teñen un tratamento matemático específico<sup>4</sup>. Neste caso aparecen singularidades nas distribucións de carga e corrente (distribucións *superficiales*, *lineales* e *puntuales*) En todo caso, a formulación matemática é o límite da correspondente á distribución continua, polo que os desenros matemáticos teóricos nesta asignatura suporán normalmente distribucións continuas.

Según (1.2)  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  son as fontes do campo electromagnético<sup>5</sup>. A fonte escalar é a *densidade de carga*. Defínese como o campo escalar  $\rho$  tal que a carga  $Q$  contida nun volumen  $V'$  sea

$$Q = \int_{V'} \rho dv' \quad , \quad \forall V' \quad (1.7)$$

A fonte vectorial é a *densidade de corrente*  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle \quad (1.8)$$

sendo  $i$  un índice que denota os tipos de portadores móbiles de carga e  $\langle \mathbf{v} \rangle_i$  o campo de velocidades promediadas da distribución  $\rho_i$ .

As fontes escalar e vectorial están relacionadas pola *ecuación de continuidade*:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.9)$$

<sup>3</sup> A pesar de que poidan ter unha compoñente na dirección de propagación. Estudaríanse algúns destes casos.

<sup>4</sup> Docencia/Asignatura de Electromagnetismo, Cap.1 e Cap. 6.

<sup>5</sup> Independentemente de que o campo poida existir tamén con  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ . As constantes multiplicativas  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  son irrelevantes na definición das fontes. De feito a súa introducción depende do sistema de unidades usado.

que expresa matemáticamente o feito experimental da conservación da carga <sup>6</sup>.

Débase notar que a ecuación de continuidade non é independente das ecuacións de Maxwell, senon que se pódese deducir delas:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] = \mu_0 \left[ \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$$

### ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS CONTINUOS

*Medio continuo* é un medio material considerado desde un punto de vista macroscópico, no que se definen unhas *campos macroscópicos* como algún tipo de promedio dos campos e magnitudes microscópicos sobre volúmenes suficientemente grandes pra que se poidan desprezar as variacións espaciales a nivel atómico e as fluctuacións temporales térmicas.

A contribución do medio ós campos pódese expresar en función da *polarización*  $\mathbf{P}$  e a *imanación*  $\mathbf{M}$ , definidas polas relacións

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{V'} \mathbf{P} dv' \\ \mathbf{m} &= \int_{V'} \mathbf{M} dv' \end{aligned} \right\}, \quad \forall V', \quad (1.16)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o *momento dipolar eléctrico* e  $\mathbf{m}$  o *momento dipolar magnético* do volumen  $V'$ .

Os campos (macroscópicos)  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  pódense definir no medio material de forma compatible cos correspondentes fóra del introducindo as *fontes ligadas de polarización*  $\rho_p$  e  $\mathbf{J}_p$  e de *imanación*  $\mathbf{J}_m$

$$\left. \begin{aligned} \rho_p &= -\nabla' \cdot \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \mathbf{J}_m &= \nabla' \times \mathbf{M} \end{aligned} \right\}, \quad (1.16)$$

Destá maneira, as ecuacións de Maxwell (1.2) conservan a validez prós campos *macroscópicos*  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  en medios materiais, supoñendo que en  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  se inclúen as cargas e correntes ligadas:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_f + \rho_p \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

As densidades de carga  $\rho_f$  e de corrente  $\mathbf{J}_f$  que non son ligadas chámanse *libres*.

Definindo os campos desplazamento eléctrico  $\mathbf{D}$  e excitación ou intensidade magnética  $\mathbf{H}$  polas relacións

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

obtéñense as *ecuacións de Maxwell macroscópicas*

---

<sup>6</sup> A única maneira de que cambie a carga contida nun volumen é que entre ou saia pola superficie que o limita.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pra determinar un campo vectorial necesítase conocer del a diverxencia e o rotacional. Consecuentemente os catro campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  (cada un tén tres compoñentes) non se póden determinar en función das fontes libres con solo as catro relacións (1.17).

Logo é necesario completalas con outras dúas. Son as *ecuacións constitutivas*, características do medio, normalmente da forma  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  ou  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ , e que dependen das propiedades do medio concreto.

### Fontes aplicadas e inducidas.

Son aplicadas as cargas e correntes que se introducen nun sistema electromagnético e sobre as que se tén control (por exemplo, a carga que se aplica a un condensador, a corrente que se fai circular por un conductor), e inducidas se aparecen como consecuencia da reacción do sistema ás fontes aplicadas (como as cargas superficiais nos conductores sometidos a campos electrostáticos, ou as correntes inducidas en conductores por campos magnéticos variables).

### Fontes reais e virtuales

As cargas e correntes chámanse *reais*, cando existen fisicamente, e *virtuales* ou *equivalentes*, cando se trata de artificios matemáticos, como as cargas imaxen, pra resolver un determinado problema.

### CONDICIÓS DE FRONTEIRA

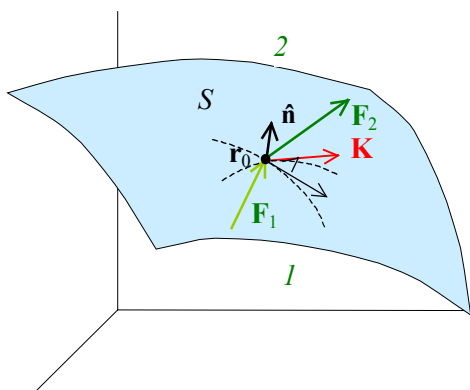


Fig. 1.1

Supoñamos un campo  $\mathbf{F}$  definido en dous medios  $V_1$  e  $V_2$  separados por unha superficie  $S$ , admitindo que  $\mathbf{F}$  poida ser discontinuo en  $S$ . Como consecuencia desta discontinuidade aparecen *singularidades superficiais* nas distribucións de carga e corrente<sup>7</sup>, que póden considerarse como o límite de distribucións volúmicas concentradas na superficie.

Nas ecuacións que siguen suponse que  $\mathbf{F}_1|_S$  e  $\mathbf{F}_2|_S$  son os valores límite dun campo  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  cando  $\mathbf{r}$  tende a un certo punto  $\mathbf{r}_0$  da superficie  $S$ , desde os medios respectivos, e  $\hat{\mathbf{n}}$  a normal á superficie nese mesmo punto  $\mathbf{r}_0$ , dirixida cara ó medio 2 (fig. 1).

Das ecuacións de Maxwell obtemos as seguintes condicións de fronteira:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_f & \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= \mu_0 \mathbf{K} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 & \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{K}_f \end{aligned} \quad (1.18)$$

<sup>7</sup> Docencia / Asignatura de Electromagnetismo / Tcampos3.

onde as *densidades superficiales de carga*  $\sigma$  representa as singularidades superficiales de  $\rho$ , e as *densidades superficiales de corrente*  $\mathbf{K}$  representan as singularidades superficiales de  $\mathbf{J}$ .

Da ecuación de continuidade dedúcese unha condición de fronteira prá densidade de corrente. Se non hai correntes superficiales, téñese

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)|_S = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (1.19)$$

As fontes superficiales tamén pódense ser libres ou ligadas, e cumpren as relacións <sup>8</sup>

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_p \quad (1.20)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_m.$$

### ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS LINEALES

Un medio é lineal desde os puntos de vista eléctrico, magnético e de condución de corrente se cumpren as ecuacións constitutivas lineales seguintes: <sup>9</sup>

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$$

sendo  $\epsilon$  e  $\mu$ , e  $\sigma$  no caso máis xeneral, magnitudes de tipo tensorial que dependen do punto do espazo <sup>10</sup>. Levando isto ás ecuacións de Maxwell, obtemos un sistema de ecuacións, na forma igual ca o inicial, pero onde xa se poden determinar os campos en función das fontes. Nun medio homoxéneo, lineal e isotrópico:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f}{\epsilon} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \left( \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

### FORMULACIÓN EQUIVALENTE: FONTES ELÉCTRICAS E MAGNÉTICAS

Os campos electromagnéticos son producidos por cargas e correntes libres eléctricas. Pero moitos problemas simplifícanse introducindo, como *fontes virtuales*, unhas unhas *cargas e correntes magnéticas* ficticias.

Supoñamos que os campos producidos polas cargas eléctricas  $\rho_f$  e as correntes eléctricas  $\mathbf{J}_f$  son *de tipo eléctrico*, e distingámoslos co superíndice <sup>(E)</sup>. Cumpirán as ecuacións de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}^{(E)} &= \rho_f & \nabla \times \mathbf{E}^{(E)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}^{(E)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^{(E)} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}^{(E)} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}^{(E)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.23)$$

<sup>8</sup> Supoñendo a polarización finita, non aparece ningunha corrente superficial de polarización.

<sup>9</sup> Aquí  $\sigma$  representa a conductividade.

<sup>10</sup> Excluiremos a posibilidade de que  $\epsilon$  teña dependencia temporal.

As ecuación dos campos *de tipo magnético* deberían ser

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}^{(M)} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}^{(M)} = -\mathcal{M}_f - \frac{\partial \mathbf{B}^{(M)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^{(M)} = -\rho_M \quad \nabla \times \mathbf{H}^{(M)} = \frac{\partial \mathcal{D}^{(M)}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Os campos totales serán a suma dos de tipo eléctrico e os de tipo magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(E)} + \mathbf{E}^{(M)} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^{(E)} + \mathbf{D}^{(M)} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^{(E)} + \mathbf{B}^{(M)} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(E)} + \mathbf{H}^{(M)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

As ecuacións que cumplen obtéñense sumando (1.29) e (1.30)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mathcal{M}_f - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = -\rho_M \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.26)$$

A posibilidade de fontes magnéticas esixe modificar as condicións de fronteira dos campos. Se  $\mathcal{M}_s$  é a corrente superficial magnética e  $\sigma_M$  a densidade superficial de carga magnética,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathcal{M}_s \quad ; \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = -\sigma_M \quad (1.27)$$

As correntes magnéticas non existen fisicamente, pero pódennos representar as *forzas electromotrices* de orixen non electromagnético. Se o campo magnético é constante, a integral de circulación de  $\mathbf{E}$  sobre unha curva cerrada, calculada a partir de (1.2), é cero. Pero facendo

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \left( \mathcal{M} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.28)$$

admítase a posibilidade de ter circulación non nula tamén no caso de  $\mathbf{B}$  constante.

En medios lineales a corrente libre  $\mathbf{J}_f$  pódese descompoñer nunha corrente *aplicada*  $\mathbf{J}_A$  e unha corrente *inducida*  $\sigma \mathbf{E}$ . A corrente magnética pódese considerar toda aplicada. Os rotacionais dos campos quedan, en consecuencia

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_A + (\sigma + i\omega\epsilon) \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathcal{M}_A - i\omega\mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.29)$$

### POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

Os campos electromagnéticos con sentido físico son  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . As ecuacións de Maxwell, unidas ás definicións dos campos  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , conteñen todo o electromagnetismo clásico. A partir delas defínense unhas campos en sentido matemático que son os *potenciales electromagnéticos*. Deduciremos unhas condicións *suficientes* que nos permiten definir estes potenciales.

Se, de acordo con (1.3), facemos  $\mathbf{B} = \nabla \psi + \nabla \times \mathbf{A}$ , de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  dedúcese  $\nabla^2 \psi = 0$ . Logo, se  $\psi$  non é uniforme, debe ter singularidades, ou diverxer no infinito<sup>11</sup>, o que conduciría respectivamente a que  $\mathbf{B}$  téñen singularidades ou non tende a cero no infinito<sup>12</sup>. Como solo se usaron as ecuacións homoxéneas,  $\psi$  non depende das fontes, polo que estas hipotéticas

<sup>11</sup> Basta considerar a dependencia radial das solucións da ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

<sup>12</sup> É *conveniente* supoñer que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  non teñen singularidades independentes das fontes, e que en puntos alonxados delas (o que se chama “o infinito”) téndennos a cero.

singularidades de  $\mathbf{B}$  non pódenn ser consecuencia de singularidades das fontes, logo concluímos que é uniforme. Consecuentemente,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.30)$$

$\mathbf{A}$  chámase *potencial vectorial*. Ademáis

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

O paréntesis na última ecuación debe ser o gradiente dun *potencial escalar*:

$$\left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \phi. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.31)$$

Os campos  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  que cumplan (1.36) e (1.37) son os *potenciales electromagnéticos*.

### FORMULACIÓN DO ELECTROMAGNETISMO EN FUNCIÓN DOS POTENCIALES

As ecuacións inhomoxéneas de Maxwell estarán garantizadas se impoñemos condicións adicionais ós potenciais. Consideremos campos no espazo libre. Expresándoos en función dos potenciais:

$$-\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$$

resultan dúas ecuacións

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

que, suposto que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  estean dados por (1.30) e (1.31), constitúen unha *formulación do Electromagnetismo en función dos potenciais* equivalente ás ecuacións de Maxwell no espazo libre. Nótese que de (1.30), (1.31) e (1.32) é posible deducir as ecuacións de Maxwell.

### TRANSFORMACIÓNS DOS POTENCIALES

Xa indicamos que os campos físicos son  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Estes campos deben ser os mesmos pra calquera par de potenciais  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  que usemos. Pero inda queda moita arbitrariedade na determinación dos potenciais. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \\ \phi' &= \phi + \beta \end{aligned}$$

outros potenciais que cumplan tamén (1.30) e (1.31).

Como  $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ,  $\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0$ . Ou, equivalentemente

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda',$$

sendo  $\lambda'(r, t)$  algún campo escalar, que pódese depender do tempo. Xa que  $\phi'$  e  $\mathbf{A}'$  deben representar o mesmo campo eléctrico ca  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ ,

$$0 = \nabla(\phi' - \phi) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \nabla\left(\beta + \frac{\partial \lambda'}{\partial t}\right).$$

Un campo con gradiente nulo debe ser uniforme (constante no espazo), pero non á forza constante no tempo. Sea

$$\beta + \frac{\partial \lambda'}{\partial t} = k(t) \Rightarrow \beta = k(t) - \frac{\partial \lambda'}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

(tomando  $\lambda = \lambda' - \int_0^t k dt'$  non cambiamos a dependencia espacial, co que  $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda' = \nabla \lambda$ ). En definitiva, resultan as relacións

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

chamadas *transformación de representación* (tamén *de norma, de calibración, de contraste* ou “*gauges*”), que convierten unhas potenciais noutras equivalentes desde o punto de vista físico.

As magnitudes electromagnéticas que non cambian anque os potenciais se transformen según (1.33) chámanse *invariantes gauge*. Tódalas magnitudes con sentido físico deben ser invariantes *gauge*.

### Representación de Coulomb

Coa condición de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Esto aporta unha simplificación notable no cálculo do potencial escalar  $\phi$ , pero xeneralmente complica o do potencial vectorial. En electrostática e magnetostática temos

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

En xeneral, usando a ecuación de continuidade e facendo  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T$ , e as relacións (1.5),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{J}_L \\ \nabla \times \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{J}_L = 0 \end{aligned}$$

Con isto o teorema de Helmholtz permite escribir

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}_L + \nabla \chi,$$

por suposto impondo que  $\nabla^2 \chi = 0$ . Pola construción dos potenciais, esta indeterminación  $\chi$  non debe afectar ós campos, e consecuentemente podemos facer  $\chi = 0$ .

Suponiendo esto, el potencial vectorial queda en función de solo la componente transversal de la corriente  $\mathbf{J}_T$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_T \quad (1.35)$$

Por esto la representación de Coulomb se llama también *gauge transversal*.

### Representación de Lorentz

La más usada en Electrodinámica es la *representación de Lorentz*. Resulta de imponerle los potenciales la *condición de Lorentz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.36)$$

Con esto tenemos dos ecuaciones formalmente iguales para los potenciales escalar y vectorial, que resultan ser las dos *ecuaciones de ondas*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Débase observar que una transformación del tipo (1.33), siendo  $\lambda$  una solución de la *ecuación de ondas* homogénea:

$$\nabla^2 \lambda - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0$$

respetando la condición de Lorentz. Consecuentemente, en la representación de Lorentz los potenciales no son únicos.